OPTION : PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES

1978

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

I

Soit f la fonction de deux variables qui, au couple de réels (x , y) fait correspondre le réel :

$$(1)\ \eta = f(x , y) = - (x + y)^3 + 5 x^2 + 2 y^2 + 8 xy + 10 x + 20 y$$

On appelle M le point de coordonnées x et y dans un plan affine pourvu d'un repère cartésien, $\mathfrak{D}$ la partie du plan satisfaisant aux conditions

$$0 \leqslant x \leqslant 4 \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

1° u étant un réel choisi dans l'intervalle $[0 , 6]$ on fait décrire à M , dans le sens des abscisses croissantes, la portion de la droite $x + y = u$ incluse dans $\mathfrak{D}$. La formule (1) définit alors une fonction de la seule variable x :

$$x \longmapsto \eta_u$$

Préciser selon les valeurs de u l'intervalle effectivement décrit par x et calculer, en fonction de u , la valeur maximale A_u de η_u dans cet intervalle.

On reconnaîtra que l'expression obtenue est un polynôme du 3e degré, différent selon que u est compris entre 0 et 2 , 2 et 3 , 3 et 9/2 , 9/2 et 6. Etudier la fonction $u \longmapsto A_u$ sur $[0 , 6]$ et la représenter graphiquement.

2° De l'étude précédente déduire la valeur maximale de f(x , y) sur $\mathfrak{D}$. Préciser les valeurs correspondantes de x et y. Vérifier qu'elles annulent les dérivées partielles f'_x et f'_y .

3° Calculer les dérivées partielles du second ordre de la fonction f et montrer qu'on peut trouver trois réels constants A , B , C , non tous nuls, tels que :

$$\forall (x , y) \ : \ A f''_{x^2} + B f''_{xy} + C f''_{y^2} = 0$$

II

Soit $g(x , y)$ une fonction de deux variables réelles de classe C^2 satisfaisant à la relation

$$(1)\ a g''_{x^2} + b g''_{xy} + c g''_{y^2} = 0$$

a , b , c étant trois réels constants non nuls tels que $b^2 - 4 ac > 0$.

On effectue le changement de variables défini par :

$$\begin{cases} r = x + \lambda y \\ s = x + \mu y \end{cases} \qquad \lambda \neq \mu$$

g(x , y) devient une fonction G(r , s) telle que :

$$g(x , y) = G(x + \lambda y \ , \ x + \mu y)$$

Montrer que G vérifie une équation du type :

$$(2)\ \alpha G''_{r^2} + \beta G''_{rs} + \gamma G''_{s^2} = 0$$

Montrer que l'on peut choisir λ et μ de telle sorte que $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\beta \neq 0$. En déduire l'expression générale de G puis de g .

Exemple A

Déterminer une fonction g(x , y) satisfaisant aux conditions suivantes :

$$2 g''_{x^2} - 3 g''_{xy} + g''_{y^2} = 0$$

$$g (x , 0) = - x^3 + 5 x^2 + 10 x$$

$$g (x , - x) = - x^2 - 10 x$$

Constater que g n'est autre que la fonction f de la partie I . Profiter de cette nouvelle forme pour retrouver, à l'aide des variables r et s , le maximum demandé à la question (I , 2°) .

Exemple B

Déterminer h(x, y) satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} 2 h''_{x^2} + h''_{xy} - h''_{y^2} = 0 \\ h (x, x) = - 1 + \cos 3x + \sin 3x \\ h (x, 0) = (\sqrt{3} + 1) \sin x \end{cases}$$

Quelles valeurs extrêmes h peut-il atteindre et pour quelles relations entre x et y ? Interpréter graphiquement ces relations et déterminer, toujours graphiquement, les points (x, y) de l'ensemble

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi \end{cases}$$

correspondant aux extrema de h . On indiquera par un signe distinctif, en regard de chaque point obtenu, s'il s'agit de la valeur maximale ou de la valeur minimale.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail